



TITLE:

物体の尖点附近の軸対称流 (流体方程式の特異性)

AUTHOR(S):

脇屋, 正一

CITATION:

脇屋, 正一. 物体の尖点附近の軸対称流 (流体方程式の特異性). 数理解析研究所講究録 1977, 302: 79-97

ISSUE DATE:

1977-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103817>

RIGHT:

物体の尖点附近の軸対称流

新沼大工 脇屋正一

1. 序

鋭い角をもつたくさび型領域でおける粘性流体の2次元運動は、くさびの角度がある臨界角以下の場合、その近くでは一般に頂点に向って無限に続く渦列となることがMoffatt¹⁾によつて指摘されている。ここではくさびに対応する3次元領域として円錐の中(あるいは外)を取上げ、縮まない粘性流体の軸対称流を考察する。

半頂角がある臨界角(一般的条件の下では約 80.9°)以下では、円錐内の流れは一般に頂角の近くでそこに向って無限に続く渦輪により形成されることが示される。渦の定性的性質は2次元の場合と同様である。議論はストークス近似での解を使つてなされるが頂点からの距離を用いたレイノルズ数は頂点の近くでは十分小さくなるので、流れのこの性質はかなり一般的に云えるものと考えられる。また2次元に

特有なものではないことが理解される。半頂角 120° の場合 (60° の円錐の外部) に得られる解は特別な注意を惹く。頂角を 0 とした極限として求められる円管の中の流れは渦列より成り 2 次元の場合と全く対応している。

以上の一般的考察に基づき、一様流中におかれた紡錘の解 (Pell と Payne²⁾) および中央の閉いた円環に対する解 (Takagi³⁾) のそれぞれ頂点及び中心の近くでの振舞が調べられ、これらが円錐および円管内の流れに夫々対応することが示される。

2. 円錐の境界条件と満す解

軸対称流に対するストークスの運動方程式は流れの関数 ψ を使って次のように与えられる。

$$L_{-1}^2 \psi = 0 \quad (2.1)$$

ここで L_k は対称軸を z 軸とした円柱座標 (z, r) に関し

$$L_k = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.2)$$

で与えられる演算子であり、また z 軸を極軸とした極座標 (ρ, θ) を使えば

$$L_k = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1-t^2}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (k+1) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{t}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (2.3)$$

ただし $t = \cos \theta$ である。Payne⁴⁾ によれば (2.1) の解は

$$L_R \phi_R = 0 \quad (2.4)$$

の解を用いて一般に表わすことができるが、その中でこの場合には有用なものは座標系 (ρ, θ) に關する次の解の中から得られる。

$$\phi_{2m+1} = A_{2m+1} \rho^\nu \frac{d^m}{dt^m} P_{\nu+m}(t), \quad (m=0, 1, \dots) \quad (2.5)$$

ここに $P_\nu(t)$ はオー種ルジャンドル関数で、 ν は任意の実数あるいは複素数であつてよい。そこで一般解を次の形にとる。

$$\begin{aligned} \psi &= r^2 (\phi_1 + \phi_3) \\ &= r^2 \rho^\nu \{A_1 P_\nu(t) + A_3 P_{\nu+1}'(t)\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

ただし $r = \rho \sin \theta$, $P_\nu' \equiv \frac{d}{dt} P_\nu(t)$ 。

(2.6) はまた球関数の性質を使つて次のように表現してもよい。

$$\psi = r^2 \left(a \rho^\nu + \frac{b}{\rho^{\nu+1}} \right) \{A P_\nu(t) + B t P_\nu'(t)\}, \quad \Re(\nu) \geq -\frac{1}{2} \quad (2.7)$$

ここに a, b, A, B は任意定数、 \Re は実部を意味する。 $\nu=1, 0$ の特別な場合には ϕ_1 と ϕ_3 とは独立な二つの解を与えた。

いから、 ψ は (2.1) を直接解いて求められる。即ち

$$\psi = (ap^2 + bp)(At^2 + Bt + C) \quad (2.8)$$

$$\psi = (ap^3 + b)(At^3 + Bt + C) \quad (2.9)$$

$\theta = \theta_0$ ($t = t_0 = \cos \theta_0$) は円錐面を表わす。 $\theta < \theta_0$ ($t > t_0$) とすれば上に求めた解は $\theta_0 < 90^\circ$ ならば円錐の中, $\theta_0 > 90^\circ$ に対しては外の場合を記述している。円錐面上で

$$\psi = \partial\psi/\partial t = 0 \quad (2.10)$$

を要求するならば (2.8), (2.9) はそれぞれ

$$\psi = (ap^2 + bp)(t - t_0)^2 \quad (2.11)$$

$$\psi = (ap^3 + b)(t - t_0)^2(t + 2t_0) \quad (2.12)$$

となり, また (2.7) に対してこの条件は

$$H(v) \equiv$$

$$P_v(t_0)\{t_0 P_v''(t_0) + P_v'(t_0)\} - t_0\{P_v'(t_0)\}^2 = 0 \quad (2.13)$$

を与えるから v はこの式から定まるものでなければならぬが, これについては節の終りで検討する。

流体の速度は

$$v_p = -\frac{1}{p^2} \frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad v_\theta = -\frac{1}{p \sin \theta} \frac{\partial\psi}{\partial p} \quad (2.14)$$

そこで $\psi = \rho^{\nu} f_{\nu}(t)$ と書いたとき $R(\nu) > 2$ であるような解は円錐の頂角で 0, 遠方で ∞ となる流れを与えるから, これは遠方の擾乱によつておこる流れの頂角附近の挙動を表わしていると考えられる。これに反し $R(\nu) < 2$ の場合の速度は $\rho = 0$ で ∞ , $\rho \rightarrow \infty$ で 0 となり, ψ は原点附近にある擾乱によつて生ずる流れの遠方における漸近形を表わしていると考えられる。併しながら対称軸上で (2.7) はゼロ速度をまた (2.11) は無限大の速度を与え, 何れもそのような擾乱を原点附近に考えることは実際の興味を惹かない。

ただ (2.12) から導かれる流れ

$$v_p = -3b\rho^2(t^2 - t_0^2), \quad v_\theta = 0 \quad (2.15)$$

は原点におかれた湧源による流れを完全に与えている。(2.15) による全流量は

$$Q = -2\pi b(1 - t_0)^2(1 + 2t_0) \quad (2.16)$$

なる一定値である。一方 $t = \pm t_0$ で $v_p = 0$ であるから, $t_0 > 0$ の場合には (2.15) は原点におかれた強さ Q の湧出し (吸込み) による円錐内部 ($t > t_0$) の流れを表わしている。平板の問題は $t_0 = 0$ の特別な場合に当る。 $t_0 < 0$ の場合, (2.15) を頂角を共有して向い合った二つの円錐の外部の解 ($-t_0 > t > t_0$) とみれば, これは強さ $8\pi b(-t_0)^3$ の吸込

4 (湧出し) による流れを与える。従って $t_0 < 0$ に対して一つの円錐の外部全域の流れが (2.15) で与えられるときは、そのような湧出しと吸込4の適当な組合せ ($t = -t_0 > 0$ で $v_p = 0$ となるような) によっておとされるであろう。特に $t_0 = -\frac{1}{2}$ ($\theta_0 = 120^\circ$) の場合には $Q = 0$ であり、これは二重湧出しによるものと考えられる。

$R(v)$ の大きな値に対し (2.13) は漸近形

$$\cos(2v+1)\theta_0 = -v \sin 2\theta_0, \quad \varepsilon \leq \theta_0 \leq \pi - \varepsilon \quad (2.17)$$

をもつ。この方程式は $|v|$ の大きな値に対して、 $\sin 2\theta_0 \neq 0$ なる限り明らかに実数解をもたない。複素数解を $v\theta_0 = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta > 0$) と書けば (2.17) は二つの実数値に因する式に分解され

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha + \theta_0) \cosh 2\beta &= -2s\alpha, \\ \sin(2\alpha + \theta_0) \sinh 2\beta &= 2s\beta, \quad s = \frac{\sin 2\theta_0}{2\theta_0} \end{aligned} \quad (2.18)$$

明らかに

$$s > 0 \text{ に対し } (2n + \frac{1}{2})\pi < 2\alpha + \theta_0 < (2n+1)\pi$$

$$s < 0 \text{ に対し } (2n + \frac{3}{2})\pi < 2\alpha + \theta_0 < 2(n+1)\pi$$

(n : 整数) であって、十分大きな n に対し (2.18) は次の漸近解をもつ。

$$s > 0: \quad \alpha_n \sim n\pi + \frac{1}{2}(\pi - \theta_0), \quad \beta_n \sim \frac{1}{2} \ln(4n\pi s)$$

$$s < 0: \alpha_n \sim n\pi + \frac{1}{2}(2\pi - \theta_0), \beta_n \sim \frac{1}{2} \ln(-4n\pi s) \quad (2.19)$$

この結果は (2.13) が無限個の複素根をもつことを示すと共に、根の近似値を求める際の基準値を与えるに役立つ。\$s=0\$ (\$\theta_0 = \pi/2\$) の場合には (2.17) は

$$\sin \pi v = 0 \quad (2.20)$$

となつて全ての整数 (\$0, 1\$ は除外) が根となる。

\$R(v)\$ の小さな場合の最初めの幾つかの根の分布は \$t_0\$ のいろいろの値に対する \$H(v)\$ の振舞を調べることにまつて知られる (図 1, 2)。ほぼ \$\theta_0 < 80.8^\circ\$ に対して (2.13) は実根をもたない。この臨界値を超すと最初あるいはその後の幾つかの根は実数値をとる。その個数及び値は勿論 \$\theta_0\$ の値に關係するが、とにかく実数根は有限個に留る。ただし \$t_0 = 0\$ (\$\theta_0 = 90^\circ\$) の場合には 1 を超す全ての整数値が根の全てである。

3. 円錐の頂角附近の流れ

遠方で与えられた擾乱によつて生じた流れは円錐の頂角附近で一般に次の形に展開されるであろう。

$$\psi = \sum_n P^{v+2} \{A_n P_{v_n}(t) + B_n t P'_{v_n}(t)\} \sin^2 \theta \quad (3.1)$$

そこで ν_n は (2.13) の解であつて $0 < R(\nu_1) < R(\nu_2) < \dots$ とする。 A_n, B_n は次元定数である。境界条件として (2.10) のように、流れが軸対称であることから $t=1$ ($\theta=0$) で

$$\psi = 0 \quad (3.2)$$

が要求されるが、(3.1) は自動的にこれを満足している。

$\nu=1$ に対しては (3.1) の一つの項は (2.12) で代えられるが、これが (3.2) の条件を満足するのは $t_0 = -\frac{1}{2}$ ($\theta_0 = 120^\circ$) の場合に限られる。このときは (2.12) より

$$\psi = \frac{a}{4} \rho^3 (2t+1)^2 (t-1),$$

$$v_\rho = -\frac{3}{4} a \rho (4t^2-1), \quad v_\theta = \frac{3}{4} a \rho (2t+1)^2 \tan \frac{\theta}{2} \quad (3.3)$$

この流れは $t = \frac{1}{2}$ ($\theta = 60^\circ$) の直線上で $v_\rho = 0$ となるのが特徴的である。

円錐頂角の十分近くでは $A_1 \neq 0, B_1 \neq 0$ である限り (3.1)

は

$$\psi \sim \rho^{\nu_1+2} \{A_1 P_{\nu_1}(t) + B_1 t P'_{\nu_1}(t)\} \sin \theta \quad (3.4)$$

θ が次第に増すと $R(\nu_1)$ の値は順次小さくなり、約 80.8° を超すと既にのべたように ν_1 は実数値をとる (表1)。もし $\nu_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ が複素根であれば $\bar{\nu}_1 = \alpha_1 - i\beta_1$ もまた常に根となるから、(3.4) はこの場合次のように書かれる筈である。

$$\psi \sim \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\alpha_1+2} \sin^2 \theta \cdot R \left[C e^{i\beta_1 \ln(p/p_0)} \{ t_0 P_{\nu_1}'(t_0) P_{\nu_1}(t) - P_{\nu_1}(t_0) t P_{\nu_1}'(t) \} \right] \quad (3.5)$$

ここで C は複素定数, p_0 は遠方で与えられた流れの状況に
関係した次元定数である。(3.5) は頂角に向って無限に続く
渦模様を形成する。その容子は 2 次元のくさび型領域でみら
れる Moffatt の渦と定性的には同じであるので簡単な説明に
止めよう。

表 1

θ_0	ν_1	$\theta_0 \nu_1$	$\ln h_1$	$\ln k_1$
0.0°		$4.47 + i1.47$		
30	$8.064 + i2.614$	$4.22 + i1.37$	1.20	9.7
60	$3.841 + i0.960$	$4.02 + i1.01$	3.27	12.6
80.8	$2.788 + i0.042$	$3.93 + i0.06$	74.8	209
80.9	2.749	3.88		
90	2	3.14		
105	1.397	2.56		
120	1	2.09		
150	0.489	1.28		

(3.5) は $a(t)$, $b(t)$ を実関数として

$$\psi \sim \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\alpha_1+2} \sin^2 \theta \cdot a(t) \sin \left[\beta_1 \ln \frac{p}{p_0} + b(t) \right] \quad (3.6)$$

と書くことができる。従って

$$\beta_1 \ln \frac{p_n}{p_0} + b(t) + n\pi = 0 \quad (3.7)$$

であるような無限個の閉曲線上で $\psi = 0$ となり, その各々が渦を形成する。原点からの距離は $p_n = p_0 e^{-b/\beta_1} e^{-n\pi/\beta_1}$ であるから, 渦の大きさは一定の比率 $k_1 = e^{\pi/\beta_1}$ で順次小さくなってゆく。また速度の大きさは $(p_n/p_0)^{\alpha_1}$ の程度であるから引続く渦の強さの比は $k_1 = e^{\pi\alpha_1/\beta_1}$ で見積られる。これらの渦は対称軸を囲む渦輪の断面を表わしているものと解される。 $180^\circ > \theta_0 > 81^\circ$ の円錐に対しては v_1 は実数値をとるが実数解の数は有限個にすぎないから, ψ の展開におけるそれらに対応する項の係数が 0 となるような状況ではこの場合にも渦列がみられることになる。

流れが軸対称である限り (3.1) は任意の物体のよどみ点近傍で適用されるものと期待される。 v_n は同じく (2.13) の根で与えられ, A_n, B_n は上流の条件の他に物体の形に依存するであろう。一様流におかれた回転楕円体のまわりの流れは $\theta_0 = 90^\circ$ ($t_0 = 0$) に対する場合の一つであるが, 特に球ではよどみ点の近くでの展開の初項は

$$\psi \sim \frac{3}{4} U r^2 \left(\frac{p}{b}\right)^2 \cos^2 \theta \quad (3.8)$$

また円板の解では $(P/b)^2$ の項が消えて

$$\psi \sim \frac{2}{3\pi} U r^2 \left(\frac{P}{b}\right)^3 \cos^3 \theta \quad (3.9)$$

となる。ここに b は球あるいは円板の半径, U は一様流の大きさである。

Pell と Payne は z 方向の一様流 U の中におかれた紡錘形の物体に対する解を次のように与えた。

$$\psi = \frac{U}{2} r^2 \left[1 - (\cosh \xi - t)^{1/2} \int_0^\infty \{ A(\lambda) K_\lambda(t) + B(\lambda) t K'_\lambda(t) \} \cdot \cos \lambda \xi d\lambda \right] \quad (3.10)$$

$$A(\lambda) = \frac{\sqrt{2}}{\cosh \pi \lambda} \left[\{ t_0 K''_\lambda(t_0) + K'_\lambda(t_0) \} K_\lambda(-t_0) + t_0 K'_\lambda(t_0) K'_\lambda(-t_0) \right] \frac{1}{H(\lambda)}$$

$$B(\lambda) = - \frac{\sqrt{2}}{\cosh \pi \lambda} \{ K_\lambda(t_0) K'_\lambda(-t_0) + K'_\lambda(t_0) K_\lambda(-t_0) \} \frac{1}{H(\lambda)}$$

$$H(\lambda) = K_\lambda(t_0) \{ t_0 K''_\lambda(t_0) + K'_\lambda(t_0) \} - t_0 \{ K'_\lambda(t_0) \}^2 \quad (3.11)$$

$$z \text{ 上 } t = \cos \eta, \quad K_\lambda = P_{-\frac{1}{2}-i\lambda} \quad \text{及び} \quad K'_\lambda(-t) = \frac{dK_\lambda(-t)}{d(-t)}$$

とする。 K_λ は円錐関数として知られる。 ξ, η は

$$z = C \frac{\sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \eta}, \quad r = C \frac{\sin \eta}{\cosh \xi - \cos \eta} \quad (C > 0)$$

によって定義される (z, r) 面上の双極座標である。物体は $\eta = \eta_0$ で、外部領域は $-\infty < \xi < \infty$, $0 \leq \eta < \eta_0$ で指示される。 $(\xi=0, \eta=0)$ は無限遠に対応する。 $\eta_0 < \pi/2$ の場合物体の形は紡錘というよりむしろ中央にくぼみのある円座と云った方が適切と思われるが、ここでは簡単に全て紡錘と呼ぶことにしよう。

(3.10) を次の形に書く。

$$\psi = -\frac{c^2 \Pi}{\sqrt{2} \pi} \frac{\sin^2 \eta}{(\cosh \xi - \cos \eta)^{3/2}} e^{-\xi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_\nu(t)}{H(\nu)} e^{-\nu \xi} d\lambda \quad (3.12)$$

$$H(\nu) = P_\nu(t_0) \{ t_0 P_\nu''(t_0) + P_\nu'(t_0) - t_0 \{ P_\nu'(t_0) \}^2 \} \quad (3.13)$$

$$G_\nu(t) = t_0 P_\nu'(t_0) \frac{d}{dt_0} [P_\nu(t_0) Q_\nu(t) - Q_\nu(t_0) P_\nu(t)] \\ - \frac{d}{dt_0} [t_0 P_\nu'(t_0)] \{ P_\nu(t_0) Q_\nu(t) - Q_\nu(t_0) P_\nu(t) \} + \frac{t P_\nu'(t)}{1-t^2} \quad (3.14)$$

ただし $\nu = -\frac{1}{2} - i\lambda$. Q_ν は第二種のルジャンドル関数であり、次の関係が成り立つ。

$$\frac{1}{\sqrt{\cosh \xi - t}} = \sqrt{2} \int_0^\infty \frac{K_\lambda(1-t)}{\cosh \pi \lambda} \cos \lambda \xi d\lambda,$$

$$P_\nu(1-t) = P_\nu(t) \cos \nu \pi - \frac{2}{\pi} Q_\nu(t) \sin \nu \pi$$

頂点 $\xi = \pm\infty$ の附近の流れの容子をみるに便利な形は (3.12) の積分に複素積分を利用することによって得られる。その正負に応じて入の複素平面の上部または下部半平面を考えればよいが、例えば上半面では $H(\lambda)=0$ の根を λ とすれば $-\bar{\lambda}$ もまた根でありこれらは夫々 $\nu, \bar{\nu}$ に対応する。純虚数の λ は ν の実数値に対応する。 $t_0 \neq 0$ の場合 $H(\nu)=0$ 即ち (2.13) の根は全て被積分関数の 1 位の極であって、その値 ν_n を用いて ψ は級数の形に求められる。この場合 $\nu=0$ は極ではなく、 $\nu=1$ は $t_0 = -\frac{1}{2}$ の場合に限り極となることは直接確かめられる。 $t_0=0$ のときは (3.12) は簡単に

$$\psi = -\frac{c^2 \sigma}{2\sqrt{2}} \frac{\sin^2 \eta}{(\cosh \xi - t)^{3/2}} e^{-\xi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_\nu(-t) - P_\nu(t) + 2t P'_\nu(t)}{\sin \pi \nu} e^{-\nu \xi} d\lambda \quad (3.15)$$

と書かれ、2以上の整数が全て極であって、積分を実行すれば球に対する知られた解に導かれる。

頂点の十分近くでは近似的に $\rho = 2c e^{-|\xi|}$ であるから最初の項だけと考慮すれば

$$\psi \sim 2\sigma g \rho^2 \sin^2 \eta \left(\frac{\rho}{2c}\right)^{\alpha_1} R \left[e^{-i\beta_1 |\xi|} \frac{G_{\nu_1}(t)}{(dH/d\nu)_{\nu=\nu_1}} \right] \quad (3.16)$$

ただし $\nu_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, また実根に対しては $g = \frac{1}{2}$, 複素根の

場合は $g=1$ を意味する。後者に対し (3.16) は明らかに (3.5) と同型であって, 約 $\eta_0 < 81^\circ$ の四つの近くで渦の列がみられる。 $\eta_0 = 120^\circ$ の場合には $v_1 = 1$ であり (3.16) は (3.3) の形になる。

$$\psi \sim \frac{4}{45} \frac{U}{c} \rho^3 (1-t)(1+2t)^2 \quad (3.17)$$

この場合 v_1 以外の根は全て複素数である。

4. 円管に対する極限問題

(2.13) 式の $\theta_0 \rightarrow 0$ における極限は

$$\lim_{v \rightarrow \infty} v^n P_v^{-n}(\cos \frac{x}{v}) = J_n(x)$$

なる関係を使って求めることができる。ここで P_v^{-n} はルジャンドルの陪関数, J_n はベッセル関数である。 $\theta_0 v = \zeta$ を有限に押えて $\theta_0 \rightarrow 0$ とすることにより ζ に対する方程式は

$$\zeta \{ J_0^2(\zeta) + J_1^2(\zeta) \} - 2 J_0(\zeta) J_1(\zeta) = 0, \quad \zeta \neq 0 \quad (4.1)$$

このような極限操作は円管の中の流れに対応すると考えられるから, この場合の流れの関数は円柱座標 (z, r) に関する (2.4) の解

$$\phi_{2m+1} = e^{-\gamma|z|} \frac{J_m(\gamma r)}{(\gamma r)^m}, \quad (m=0, 1, \dots) \quad (4.2)$$

を用いて容易に次の如く求められる。

$$\psi = \sum_1^n e^{-\gamma_n |z|} r^2 \left\{ A_n J_0(\gamma_n r) + B_n \frac{J_1(\gamma_n r)}{\gamma_n r} \right\} \quad (4.3)$$

この解は原点附近にある擾乱による円管内の流れを与えるものと考えられる。Fitz-Gerald⁵⁾はこれを用いていわゆる *bolus flow* を取扱っている。 $r = r_0$ (円管の半径) での境界条件 (2.10) から, $\zeta_n = \gamma_n r_0$ に対し (4.1) が容易に導かれる。

十分大きな $|z|$ の値に対して (4.1) は

$$\cos 2\zeta = -2\zeta \quad (4.4)$$

この式は n の大きな値に対して漸近解

$$\zeta_n \sim \frac{1}{2} \{ (2n+1)\pi \pm i \ln(4n\pi) \} \quad (4.5)$$

をもつから, (4.1) は無限に多くの複素根を有するわけである。実数根は存在しない。最小の実部をもつ根を $\gamma_1 r_0 = \zeta_1 = p_1 \pm i\delta_1$ ($p_1, \delta_1 > 0$) とすれば遠方では

$$\psi \sim 2r^2 e^{-p_1 |z|/r_0} \Re \left[e^{-i\delta_1 |z|/r_0} \left\{ A_1 J_0(\gamma_1 r) + B_1 \frac{J_1(\gamma_1 r)}{\gamma_1 r} \right\} \right] \quad (4.6)$$

(4.6) による流れの場は明らかに中心軸を囲む同じ大さの渦輪の列により形成される。輪の中心間の距離は

$$\pi r_0 / g_1 = 2.142 r_0 \quad (4.7)$$

円を一つの接線のまわり2回転して作られる中央の閉じた円環の定速並進によって生ずる軸対称な流れは Takagi により求められた。この問題は紡錘の場合の $\eta_0 \rightarrow 0$ とした極限であって、中心附近の流れはこの節で考察した解の具体例を与えるものと考えられる。これはまた2次元の場合に Schubert⁶⁾ によって取扱われたカusp状の角の流れに対応するものでもある。Takagi の解は次の如くである。

$$\psi = \frac{c^2 U}{\pi} \frac{\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^{3/2}} \int_0^\infty \left[\eta \{ \Delta_1(l\eta_0) K_0(l\eta) - \Delta_2(l\eta_0) I_0(l\eta) \} \right. \\ \left. + \eta_0 I_1(l\eta) \right] \cos l\xi \frac{dl}{\Delta_1(l\eta_0)} \quad (4.8)$$

$$\Delta_1(l\eta_0) = l\eta_0 \{ I_0^2(l\eta_0) - I_1^2(l\eta_0) \} - 2I_0(l\eta_0) I_1(l\eta_0)$$

$$\Delta_2(l\eta_0) = l\eta_0 \{ I_0(l\eta_0) K_0(l\eta_0) + I_1(l\eta_0) K_1(l\eta_0) \} - 2I_1(l\eta_0) K_0(l\eta_0)$$

ここに I_n, K_n は変形されたベッセル函数であり、座標 (ξ, η) は

$$z = \frac{c\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad r = \frac{c\eta}{\xi^2 + \eta^2} \quad (c > 0)$$

によって定義される。円環は $\eta = \eta_0$ で指示され外部領域は $-\infty < \xi < \infty, 0 \leq \eta < \eta_0$ に対応する。

中心 $\xi = \infty$ の附近の解をうるには再び複素積分が利用

えられる。 $l\eta_0 = i\zeta$ とおいて (4.8) を書き直せば

$$\psi = \frac{U}{2\pi} r \rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{\zeta}(\eta)}{\Delta_1(\zeta)} e^{-\zeta \xi / \eta_0} d\ell \quad (4.9)$$

ただし $\rho = (z^2 + r^2)^{1/2}$ 及び

$$\Delta_1(\zeta) = i \left[\zeta \{ J_0^2(\zeta) + J_1^2(\zeta) \} - 2 J_0(\zeta) J_1(\zeta) \right]$$

$F_{\zeta}(\eta)$ は (4.8) から容易に導かれるので省略する。 l の極素平面を考へ、 ζ が $\Delta_1(\zeta) = 0$ 即ち (4.1) の根であれば $\bar{\zeta}$ も同様でこれらは夫々 $-\bar{\ell}$, ℓ に対応する。 $\zeta = 0$ は被積分関数の極ではなく、全ての極 (1 位) は (4.1) の根 (複素数) として見出される。かくて紡錘についてと同様な手続で (4.3) と類似の展開を得ることが出来る。

参考文献

- 1) H.K. Moffatt: J. Fluid Mech. 18 (1964) 1.
- 2) W.H. Pell and L.E. Payne: Quart. Appl. Math. 18 (1960) 257.
- 3) H. Takagi: J. Phys. Soc. Japan 35 (1973) 1225.
- 4) L.E. Payne: J. Math. & Phys. 38 (1959) 145.
- 5) J.M. Fitz-Gerald: J. Fluid Mech. 51 (1972) 463.
- 6) G. Schubert: J. Fluid Mech. 27 (1967) 647.

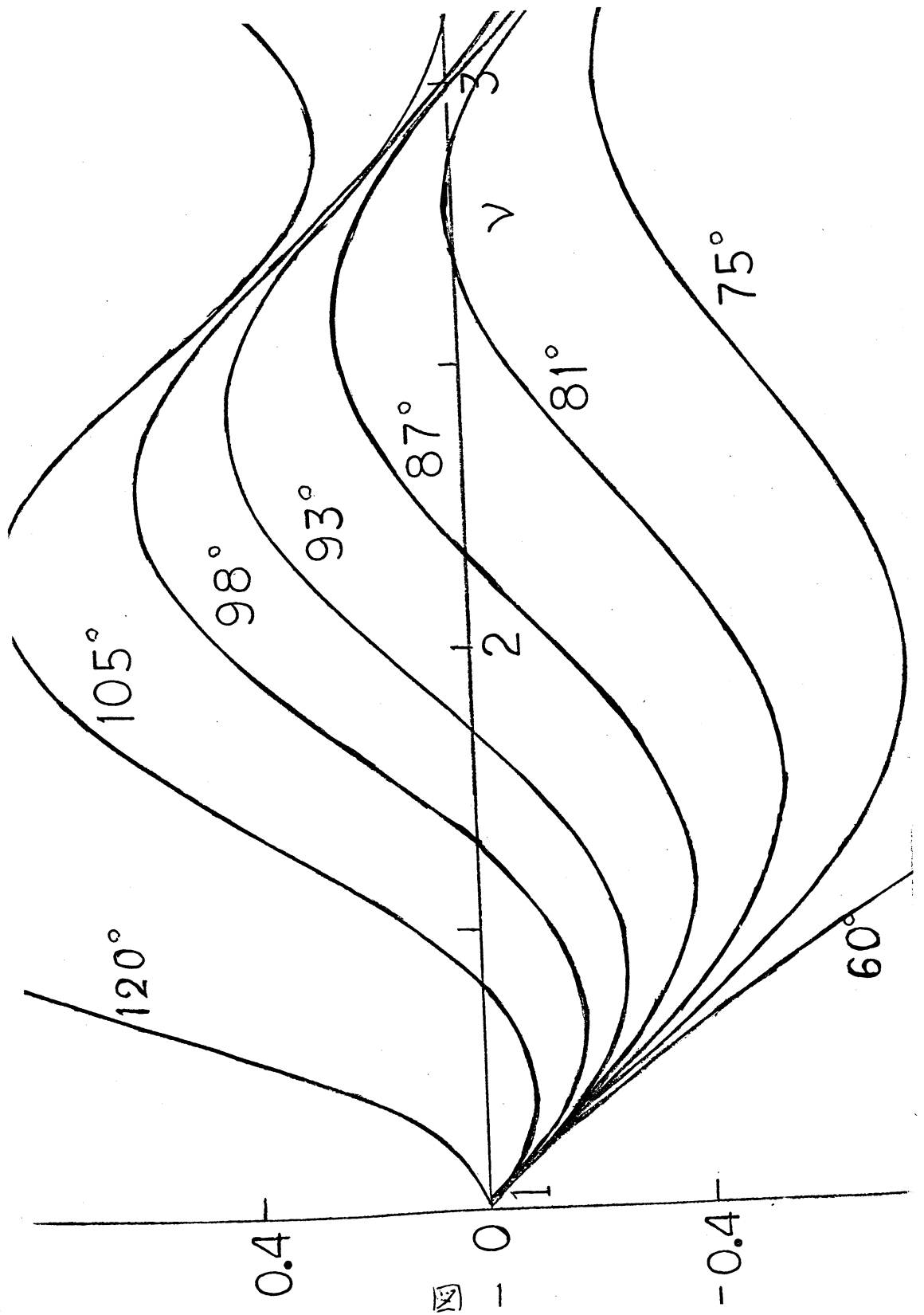


图 1

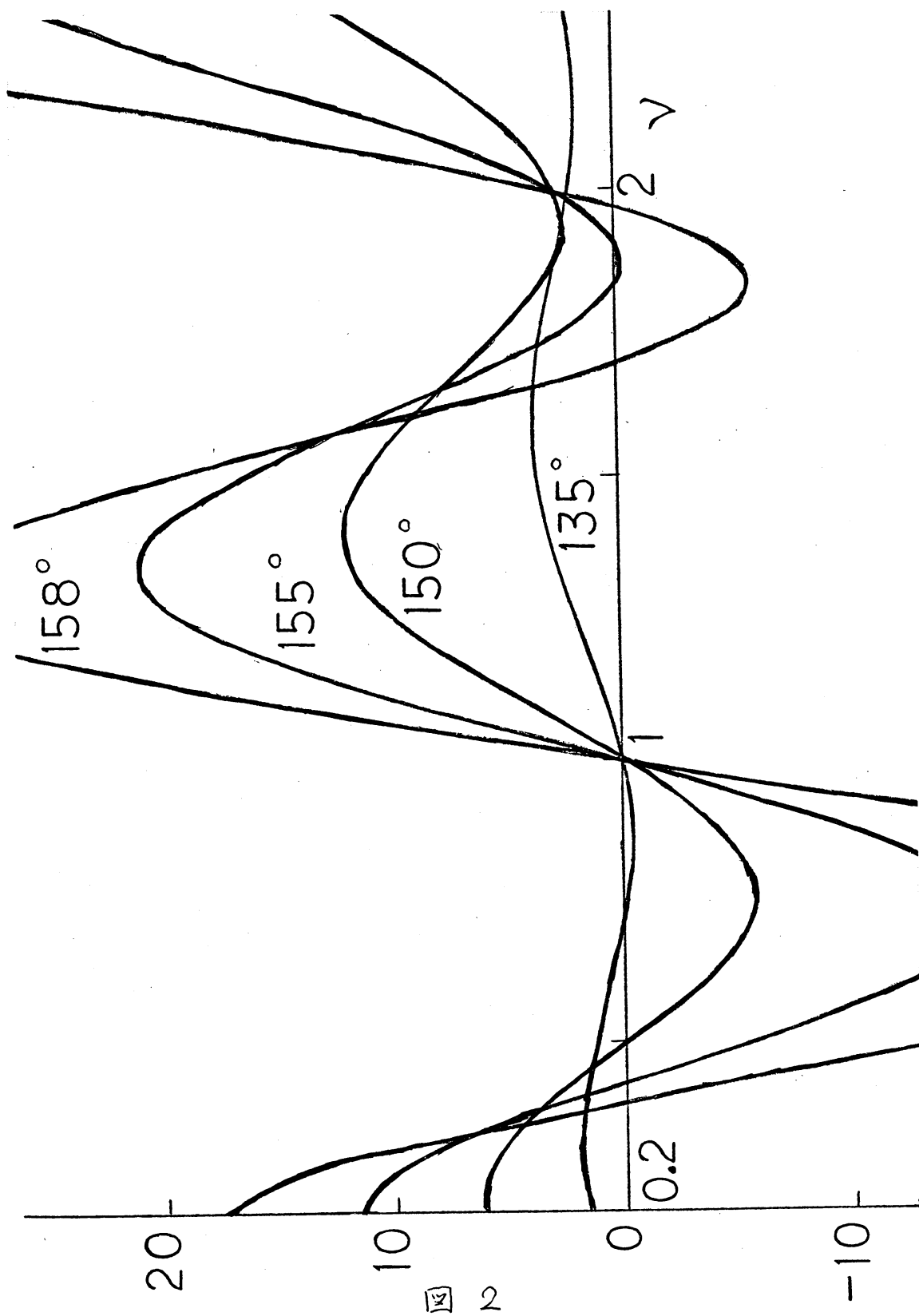


图 2